Einige Rekursionsformeln für Summen mit Binomialkoeffizienten

Rieger, Georg Johann

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 31, 1980, S.137-141

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Einige Rekursionsformeln für Summen mit Binomialkoeffizienten

Von **G.J. Rieger,** Hannover

Eingegangen am 6. 3. 1980

Vorgelegt von Theodor Kaluza

Kleine lateinische Buchstaben bedeuten ganzrationale Zahlen.

Für $n \geq 0$ ist $n!$ erklärt vermöge $0! := 1$ und $m! := m \cdot (m-1)!$ $(m > 0)$. Es sei

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!} & \text{falls } 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(„Binomialkoeffizient"). Die interessante Arbeit [1] von Apéry über die Irrationalität von $\zeta(2)$ und $\zeta(3)$ stützt sich für die Summen

$$a_n' := \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}, \quad a_n := \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$$

auf die Rekursionsformeln

$$\text{(0)} \qquad \begin{aligned} &n^2 a_{n-1}' + (11n^2 + 11n + 3)\, a_n' - (n+1)^2 a_{n+1}' = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}), \\ &n^3 a_{n-1} - (2n+1)(17n^2 + 17n + 5)\, a_n + (n+1)^3 a_{n+1} = 0 \quad (n \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Wir wollen uns in dieser Arbeit mit verwandten Summen befassen.

Satz 1. *Es sei*

$$\tau_{n,d}(\beta) := \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{n+d+k}{k} \beta^k;$$

für $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} &n(n+d)(2n+d+2)\tau_{n-1,d}(\beta) \\ &-(2(1+2\beta)n^2 + 2(1+2\beta)(d+1)n + d + \beta(d+2)d)(2n+d+1)\tau_{n,d}(\beta) \\ &+(n+1)(n+d+1)(2n+d)\tau_{n+1,d}(\beta) = 0. \end{aligned}$$

Beweis. Für $n < 0$ wird in (1) nur $0 = 0$ behauptet. Es sei $0 \leq k \leq n+1$, $N := n+d+k$. Beim Koeffizientenvergleich für β^k ist zu zeigen

$$\text{(2)} \qquad \begin{aligned} &(n+d)(2n+d+2)n \binom{n-1}{k}\binom{N-1}{k} \\ &-(2n^2 + 2n(d+1) + d)(2n+d+1)\binom{n}{k}\binom{N}{k} \\ &-(4n^2 + 4n(d+1) + (d+2)d)(2n+d+1)\binom{n}{k-1}\binom{N-1}{k-1} \\ &+(n+1)(2n+d)(n+d+1)\binom{n+1}{k}\binom{N+1}{k} = 0. \end{aligned}$$

Für $0 \leq k \leq n+1$ ist

$$(3) \qquad n\binom{n-1}{k} : \binom{n}{k} : \binom{n}{k-1} : \binom{n+1}{k} = (n-k)(n-k+1) : (n-k+1) : k : (n+1),$$
$$\binom{N-1}{k} : \binom{N}{k} : \binom{N-1}{k-1} : (n+d+1)\binom{N+1}{k} = (n+d) : (n+d+k) : k : (n+d+k)(n+d+k+1).$$

(2) lautet dann

$$\begin{aligned}
&(n+d)^2(2n+d+2)(n-k)(n-k+1)\\
&-(2n^2+2n(d+1)+d)(2n+d+1)(n-k+1)(n+d+k)\\
(4)\qquad &-(2n+d+2)(2n+d)(2n+d+1)k^2\\
&+(n+1)^2(2n+d)(n+d+k)(n+d+k+1)=0,
\end{aligned}$$

was man direkt nachrechnet (und zwar etwa so: die linke Seite von (3) ist ein quadratisches Polynom in k, welches für $k = 0, n+1, -(n+d)$ verschwindet).

Für $\beta \in \mathbb{C}$ mit $|\beta|<1$ sei

$$F(a,b;c;\beta) := 1 + \frac{ab}{c}\frac{\beta}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{\beta^2}{2!} + \ldots$$

(„hypergeometrische Reihe“) und

$$P_n(\beta) := F(-n, 1+n; 1; \frac{1-\beta}{2}) \qquad (n \geq 0)$$

(„n-tes Legendre-Polynom“). (1) liefert das geläufige

$$nP_{n-1}(\beta) - (2n+1)\beta P_n(\beta) + (n+1)P_{n+1}(\beta) = 0 \qquad (n \geq 0).$$

Es ist

$$\tau_{n,d}(\beta) = F(-n, n+d+1; 1; -\beta) \qquad (n \geq 0,\ n+d \geq 0).$$

Es sei $F(a,b) := F(a,b;1;-\beta)$; mit $a=-n$, $b=n+d+1$ ist (1) eine Beziehung zwischen

$$(5) \qquad F(a+1,b-1),\ F(a,b),\ F(a-1,b+1),$$

welche sich leicht aus den Formeln von Gauss für benachbarte F folgern läßt. Dazu beachten wir (vgl. etwa [2], S. 103)

$$(6) \qquad (b-1-a)F(a,b-1) + aF(a+1,b-1) - (b-1)F(a,b) = 0,$$

$$(7) \qquad (b-a)(1+\beta)F(a,b) - (1-a)F(a-1,b) + (1-b)F(a,b-1) = 0.$$

Wegen (6) wird aus (1) eine Beziehung zwischen

$$(8) \qquad F(a,b-1),\ F(a,b),\ F(a-1,b+1)$$

statt (5). Wegen (7) wird aus (1) eine Beziehung zwischen

$$(9) \qquad F(a-1,b),\ F(a,b),\ F(a-1,b+1)$$

statt (8). Wegen (6) mit $a-1$, $b+1$ statt a,b wird aus (1) eine Beziehung zwischen

$$F(a-1,b),\ F(a,b)$$

statt (9), welche sich beim Nachrechnen als

$$0 \cdot F(a-1,b) + 0 \cdot F(a,b) = 0$$

erweist. Damit ist dann (1) erneut bewiesen.

Mit der Formel

$$F(-n,b;c;z) = (1-z)^{c+n-b} F(c+n,c-b;c;z) \tag{10}$$

von Euler (1748) bekommt man leicht

$$\tau_{n+d,-d}(\beta) = (1+\beta)^d \tau_{n,d}(\beta) \qquad (0 \leq n \in \mathbb{Z}, 0 \leq d \in \mathbb{Z}, \beta \in \mathbb{R}).$$

Mit der Formel

$$F(a,b;c;1) = \frac{\Gamma(c)\,\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\,\Gamma(c-b)}$$

von Gauss (1812) bekommt man leicht

$$\sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{k} (-1)^k = (-1)^n \binom{n+d}{d}.$$

Satz 2. *Es sei*

$$\delta_{n,d}(\beta) := \sum_{0 \leq k \leq n} \binom{n}{k} \binom{n+k}{d+k} \beta^k;$$

für $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\begin{aligned} &n(n+1)\,\delta_{n-1,d}(\beta) - (1+2\beta)\,(n+1)\,(2n+1)\,\delta_{n,d}(\beta) \\ &+ (n+1-d)\,(n+1+d)\,\delta_{n+1,d}(\beta) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Beweis. Für $n<0$ wird in (11) nur $0=0$ behauptet. Es sei $0 \leq k \leq n+1$. Beim Koeffizientenvergleich für β^k ist zu zeigen

$$\begin{aligned} &n\binom{n-1}{k}\binom{n-1+k}{d+k} - (2n+1)\binom{n}{k}\binom{n+k}{d+k} \\ &-2(2n+1)\binom{n}{k-1}\binom{n+k-1}{d+k-1} \\ &+(n+1-d)\,(n+1+d)\,(n+1)^{-1}\binom{n+1}{k}\binom{n+1+k}{d+k} = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

(12) ist klar für $d+k<0 \vee n<d$. Es sei $d+k \geq 0$, $n \geq d$. Es ist

$$\begin{aligned} &\binom{n-1+k}{d+k} : \binom{n+k}{d+k} : \binom{n+k-1}{d+k-1} : \binom{n+1+k}{d+k} \\ &= (n-d) : (n+k) : (d+k) : \frac{(n+k+1)\,(n+k)}{n+1-d}. \end{aligned}$$

(12) lautet wegen (3) dann

$$\begin{aligned} &(n-k)\,(n-k+1)\,(n-d) - (2n+1)\,(n-k+1)\,(n+k) \\ &-2\,(2n+1)\,k\,(d+k) + (n+1+d)\,(n+k+1)\,(n+k) = 0, \end{aligned}$$

was man direkt nachrechnet (etwa mittels $k=0, n+1, -n$).

Wie Satz 1 läßt sich auch Satz 2 mit Hilfe benachbarter F erneut beweisen.

Es ist
$$\delta_{n,d}(\beta) = \begin{cases} \binom{n}{d} F(-n, n+1; d+1; -\beta) & (d \geq 0) \\ \binom{n}{-d} \beta^{-d} F(-n-d, n-d+1; 1-d; -\beta) & (d \leq 0). \end{cases}$$

Wegen $F(a,b;c;z) = F(b,a;c;z)$ und (10) folgt daraus
$$\beta^d \, \delta_{n,d}(\beta) = (1+\beta)^d \, \delta_{n,-d}(\beta) \qquad (n \in \mathbb{Z},\ 0 \leq d \in \mathbb{Z},\ \beta \in \mathbb{R}).$$

Es sei
$$\mu_{n,d,k} := \binom{n}{k}^2 \binom{n+d+k}{k}, \quad \sigma_{n,d} := \sum_{0 \leq k \leq n} \mu_{n,d,k};$$

für

(13) $\quad n \geq 1,\ 0 \leq k \leq n+1,\ n+d \geq 0$

ist
$$\begin{aligned} &\mu_{n,d,k} : \mu_{n+1,d,k} : \mu_{n-1,d,k} : \mu_{n,d,k-1} = \\ &(n+1-k)^2 (n+d+k) : (n+1)^2 (n+d+k)(n+1+d+k)(n+1+d)^{-1} \\ &: (n-k)^2 (n+1-k)^2 (n+d) n^{-2} : k^3. \end{aligned}$$

Es sei
$$\begin{aligned} A_{n,d} &:= (n+d)^2 (n-d)(5n+5+3d), \\ B_{n,d} &:= 55n^4 + (110+88d)n^3 + (70+132d+43d^2)n^2 + (15+62d+43d^2+6d^3)n \\ &\qquad + 3d(d+1)(d+3), \\ C_{n,d} &:= (n+1)^2 (n+d+1)(5n+3d), \\ G_{n,d} &:= 30n^4 + (45+38d)n^3 + (15+38d-3d^2)n^2 + (9-9d-19d^2)dn - 2d^3(5+3d), \\ H_{n,d} &:= (n+d)^3 (5n+5+3d), \\ L_{n,d,k} &:= n^2 (A_{n,d} + B_{n,d} - C_{n,d}) - nG_{n,d}k - H_{n,d}k^2; \end{aligned}$$

es ist
$$G_{n,d} = (n^2-d^2)(3n+2d)(5n+5+3d) + (n+1)n(3n+2d+3)(5n+3d);$$

durch direktes Nachrechnen (etwa durch Koeffizientenvergleich bei den Potenzen von k) folgt für (13) leicht

$$\text{(14)} \qquad \begin{aligned} &n^2 (A_{n,d}\mu_{n-1,d,k} + B_{n,d}\mu_{n,d,k} - C_{n,d}\mu_{n+1,d,k}) \\ &= L_{n,d,k}\mu_{n,d,k} - L_{n,d,k-1}\mu_{n,d,k-1}. \end{aligned}$$

Satz 3. *Für* $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$ *gilt*
$$A_{n,d}\sigma_{n-1,d} + B_{n,d}\sigma_{n,d} - C_{n,d}\sigma_{n+1,d} = 0.$$

Beweis. Für $n \geq 1 \wedge n+d \geq 0$ folgt das aus (14) durch Summation über $0 \leq k \leq n+1$. Für $n = 0 \wedge d \geq 0$ folgt die Behauptung aus $\sigma_{-1,d} = 0$, $\sigma_{0,d} = 1$, $\sigma_{1,d} = d+3$. In den verbleibenden Fällen wird $0+0-0=0$ behauptet.

Satz 3 mit $d = 0$ ergibt (0).

Es sei
$$\begin{aligned} A'_{n,d} &:= n^2 (n+d)(5n+5+3d), \\ C'_{n,d} &:= (n+d+1)^2 (n-d+1)(5n+3d), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
E_{n,d} &:= (n^2-d^2)n\,(5n+5+3d) - (n+d+1)^2\,(n+1)\,(5n+3d),\\
G'_{n,d} &:= 3\,(n^2-d^2)\,(5n+5+3d) + 3\,(n+d+1)^2\,(5n+3d),\\
H'_{n,d} &:= (n-d)\,(5n+5+3d),\\
L'_{n,d,k} &:= B_{n,d} + E_{n,d} - G'_{n,d}k - H'_{n,d}k^2,\\
\varrho_{n,d,k} &:= \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{d+k}, \quad \gamma_{n,d} := \sum_{0\le k\le n} \varrho_{n,d,k}.
\end{aligned}
$$

Für

(15) $\qquad n \geq 1,\ n \geq d,\ d+k \geq 0,\ 0 \leq k \leq n+1$

ist

$$
\begin{aligned}
&\varrho_{n,d,k} : \varrho_{n+1,d,k} : \varrho_{n-1,d,k} : \varrho_{n,d,k-1} =\\
&(n+1-k)^2\,(n+k) : (n+1)^2\,(n+k)\,(n+1+k)\,(n+1-d)^{-1}\\
&\qquad : (n-k)^2\,(n+1-k)^2\,(n-d)n^{-2} : k^2\,(d+k).
\end{aligned}
$$

Durch direktes Nachrechnen folgt für (15) leicht

$$
\begin{aligned}
(16)\qquad & A'_{n,d}\,\varrho_{n-1,d,k} + B_{n,d}\,\varrho_{n,d,k} - C'_{n,d}\,\varrho_{n+1,d,k}\\
&= L'_{n,d,k}\,\varrho_{n,d,k} - L'_{n,d,k-1}\,\varrho_{n,d,k-1}.
\end{aligned}
$$

Satz 4. *Für* $n \in \mathbb{Z}$, $d \in \mathbb{Z}$ *gilt*

(17) $\qquad A'_{n,d}\,\gamma_{n-1,d} + B_{n,d}\,\gamma_{n,d} - C'_{n,d}\,\gamma_{n+1,d} = 0.$

Beweis: Für $d+k<0$ ist $\varrho_{n,d,k} = 0$; es folgt

$$
\gamma_{n,d} = \sum_{\substack{0\le k\le n\\ k\ge -d}} \varrho_{n,d,k}.
$$

Für $n \geq 1$, $n \geq d$ folgt aus (16) durch Summation über k mit $0 \leq k \leq n+1$, $d+k \geq 0$ sofort (17). In den Fällen $n<-1$, $n=-1$, $n=0$, $n+1<d$, $n+1=d$ wird $0+0-0=0$ behauptet.

Mein Dank gilt Burghart Hoffrichter und Roman Rieger für die Anfertigung von numerischem Material.

Einer brieflichen Mitteilung von Prof. Askey zufolge könnte man hier noch auf [3] hinweisen.

Literatur

[1] H. COHEN, Démonstration de l'irrationalité de $\zeta(3)$ (d'après R. APERY). Seminaire de Théorie des Nombres 05 Oktober 1978, Grenoble.

[2] ERDELEYI – MAGNUS – OBERHETTINGER – TRICOMI, Higher transzendental functions I, New York, 1953.

[3] J. A. WILSON, Three-term contiguous relations and some new orthogonal polynomials. In: E. B. SAFF and R. S. VARGA, ed. Padé and rational approximation. Academic Press 1977, S. 227–232.